www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION

MATHEMATIQUES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

DUREE : 4 heures 30 - COEFFICIENT : 8

OPTION GENERALE

LE SUJET COMPREND TROIS PROBLEMES INDEPENDANTS

PROBLEME I.

On se propose d'étudier l'existence de valeurs et vecteurs propres pour la matrice à éléments réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$$

avec $c \neq 0$.

1°) Ecrire le système donnant les composantes (x, y, z, t) des vecteurs propres associés à une valeur propre k de A.

2°) Montrer que $k = 0$ est valeur propre et que l'espace propre associé est de dimension 2. En donner une base (e_1, e_2) où e_1 et e_2 ont respectivement la première et la deuxième composante nulle.

3°) On cherche maintenant s'il existe une valeur propre $k \neq 0$. Montrer qu'alors nécessairement $t \neq 0$ et que k est solution d'une équation du second degré ayant 2 racines distinctes.

4°) Prouver alors que les deux valeurs trouvées sont effectivement valeurs propres en donnant pour chacune d'elles un vecteur propre associé e_3 et e_4.

5°) La matrice A est-elle diagonalisable ?

GENERALISATION

6°) En recherchant de la même façon valeurs et vecteurs propres étudier si la matrice ***réelle*** carrée d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}\, a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $a_{n-1} \neq 0$, est diagonalisable.

PROBLEME II.

1°) Etudier et représenter graphiquement la fonction définie par :

$2\text{Log}\,|x| + (1/x) - x$. où Log désigne la fonction logarithme népérien.

2°) Montrer que quel que soit $x \in]0, 1[$: $\quad 0 \leq \dfrac{x\,\text{Log}(x)}{x^2 - 1} \leq 1/2$

Dans la suite du problème α désigne un réel strictement positif.

3°) On considère la fonction g_α définie sur $[0, +\infty[$ par :

$g_\alpha(0) = 0$, et si $x > 0$, $g_\alpha(x) = x^\alpha \text{Log}(x)$

a) Calculer pour $a > 0$:

$$\int_a^1 g_\alpha(t)\,dt$$

b) En déduire :

$$\int_0^1 g_\alpha(t)\,dt$$

4°) a) Pour quelles valeurs de c et d la fonction f_α définie sur $[0, 1]$ par :

$f_\alpha(0) = c$; $f_\alpha(1) = d$ et pour $0 < x < 1$ par :

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha\,\text{Log}(x)}{x^2 - 1}$$

est-elle continue sur $[0, 1]$?

b) Etudier la dérivabilité de f_α.

5°) Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\text{Log}(x)}{x^2 - 1}\,dx$$

Calculer $I_n - I_{n-1}$.

6°) En remarquant que :

$$I_n = \int_0^1 x^{2n}\,\frac{x\text{Log}(x)}{x^2 - 1}\,dx$$

donner une majoration de I_n et montrer que $\lim I_n = 0$.

7°) Ecrire I_0 à l'aide de I_n et de $S_n = 1/2^2 + 1/4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/(2n)^2$.

8°) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de I_0.

.../...

PROBLEME III.

NOTATIONS

Dans tout le problème on désignera par α une constante réelle strictement positive, par n un entier naturel *non nul* et par k un entier naturel.
X_n sera une variable aléatoire suivant **la loi de Poisson de paramètre** $n\alpha$; u_n désignera la probabilité pour que l'on ait $(X_n \leq n)$: $u_n = P[X_n \leq n]$.
On admettra que la suite (s_n) définie par :

$$s_n = (n+1)e^{-n\alpha}\frac{(n\alpha)^n}{n!}$$ a pour limite 0.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

1°) Quelle est la loi de X_n, c'est-à-dire, pour tout entier k, la valeur de $P[X_n = k]$?

2°) Pour une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre μ ($\mu > 0$) montrer que le maximum de $p_k = P[Y = k]$ est obtenu pour $k = E(\mu)$ partie entière de μ.

3°) On pose pour tout x positif :

$$J_k(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x e^{-t}t^k\,dt$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $J_k(x)$ et $J_{k+1}(x)$. En déduire une expression explicite de $J_k(x)$.

b) On pose :

$$I_k = \frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k\,dt$$

Montrer que l'intégrale I_k a un sens et que $I_k = 1$.

c) Ecrire u_n sous forme de somme. En déduire : $$u_n = \frac{1}{n!}\int_{n\alpha}^{+\infty} e^{-t}t^n\,dt$$

ETUDE DU CAS $\alpha > 1$

4°) Etablir à l'aide de 2°) que la suite $(q_k)_{k\in N}$ définie par : $q_k = P[X_n = k]$ est croissante sur [0,n]. En déduire que : $u_n \leq s_n$ et que la suite (u_n) converge.

ETUDE DU CAS $0 < \alpha < 1$

5°) Etablir que :

$$P(X_n > n) = \frac{(n\alpha)^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{-n\alpha t}t^n\,dt$$

6°) Vérifier, en étudiant la fonction $t \longrightarrow e^{-n\alpha t}t^n$ sur [0, 1], que :

$$0 \leq \int_0^1 e^{-n\alpha t}t^n\,dt \leq e^{-n\alpha}$$

En déduire l'existence d'une limite pour la suite (u_n). Quelle est cette limite ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail